

STĂNESCU MARIUS MARINEL
BĂGNARU DAN GHEORGHE

**STĂNESCU MARIUS MARINEL
BĂGNARU DAN GHEORGHE**

PROBLEME EXTREMALE ȘI VARIATIONALE



**Editura UNIVERSITARIA
Craiova, 2017**

Referenți științifici:

Prof.univ.dr. ing. Bică Marin

Prof.univ.dr. ing. Roșca Vâlcu

Copyright © 2017 Editura Universitaria

Toate drepturile sunt rezervate Editurii Universitaria

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

STĂNESCU, MARIUS MARINEL

Probleme extremale și variaționale / Stănescu Marius Marinel, Băgnaru

Dan Gheorghe. - Craiova : Universitaria, 2017

Conține bibliografie

ISBN 978-606-14-1229-7

I. Băgnaru, Dan-Gheorghe

CAPITOLUL 1

INTRODUCERE

Istoria problemei izoperimetrice, care a început încă din antichitate cu legenda reginei Didona a Cartaginei, este ușor de urmărit până la Herman Schwartz din Berlin. În prezentarea acestui scurt istoric ne vom opri numai asupra unor lucrări mai importante apărute de-a lungul istoriei, unele dintre ele prezentând acum mai mult un interes literar.

Așa cum am amintit mai sus prima problemă variațională a fost așa numita problemă a Didonei. Didona, Dido sau Elisa, este o celebră regină din antichitate, rămasă în istorie ca fondatoare a Cartaginei, dar și în istoria matematicii pentru două motive: mai întâi că este prima femeie care avea cunoștințe certe de matematică, iar mai apoi pentru că ridicarea cetății Cartaginei i se datorează. Problema este una matematică, a cărei rezolvare științifică a fost dată abia în secolul al XVII-lea de către matematicianul elvețian, Jacques Bernoulli.

Legenda Didonei este impresionantă și a fost subiect pentru mulți artiști, fie ei compozitori sau pictori. Dar prima lucrare artistică în care una dintre eroine este Didona, a fost Aenis (Eneida) lui Vergilius. Iată, pe scurt, povestea Didonei.



Fig. 1.1
Didona



Fig. 1.2
Cartagina

Didona (secolul al IX-lea î.Hr.) era fiica regelui din Tyr, Mutto, și sora lui Pygmalion (nu sculptorul îndrăgostit de propria operă). Tyrul era o bogată cetate feniciană și la moartea regelui a fost moștenită de cei doi frați.

A fost căsătorită cu Sichaeus, un înalt dregător și preot, dar fratele Didonei care a dorit să pună mâna pe averea lui, l-a ucis pe acesta și chiar s-a hotărât să-și ucidă și sora.

Didona și-a iubit soțul cu devoțiune și s-a jurat să-i rămână credincioasă și după moarte. Aflând ce făcuse și ce punea la cale Pygmalion și îndurerată atât de moartea soțului cât și de trădarea fratelui, și-a încărcat averea pe corăbii și, însoțită de slujitorii săi credincioși, a plecat pe Mediterana.

După peregrinări nenumărate se oprește pe țărmul de nord al Africii, în dreptul unei locații numită Byrsa (în Tunisul de astăzi). Aici le cere localnicilor să-i ofere un loc pentru a-și stabili sălașul. Aceștia i-au oferit, în bătaie de joc, atâta suprafață de pământ cât poate cuprinde cu o piele de bou (în traducere Byrsa înseamnă piele de bou). Istețimea Didonei aici s-a văzut.

Ambiguitatea termenilor cererii berberilor a condus-o la o rezolvare ingenioasă a problemei: a tăiat pielea de bou în fâșii foarte subțiri, le-a pus cap la cap și a înconjurat cu ele un deal de pe litoral. Presupunem că pielea bouului ar fi avut 4 metri pătrați din care s-au tăiat fâșii late de 2,5 mm. Rezultă 800 de fâșii lungi de câte 2 metri, deci perimetrul înconjurat ar fi avut valoarea de 1600 metri, care este în același timp lungimea cercului de la baza dealului. Adică aproximativ 20 de hectare, suficient pentru un început. În perioada de glorie a cetății, lungimea zidurilor de apărare a ajuns la 35 Km, în portul bine amenajat și protejat încapând și câte 220 de corăbii de război.

În decursul timpului cetatea Cartaginei a pus mari probleme Romei (vezi războaiele punice), Cato cel Bătrân (234 – 146 î.Hr.) încheindu-și fiecare cuvântare din Senat cu expresia “censeo carthaginem esse delendam” (cred că trebuie să distrugem Cartagina).

Rezolvarea problemei de către Didona este dovada că ea stăpâna cunoștințe de matematică: dintre toate suprafețele cu același perimetru, cea mai mare este cea a cercului. Această problemă, numită a izoperimetrelor, a

fost studiată de Bernoulli. Mai mult, fiind vorba de un deal (asimilat cu un con), aria suprafeței laterale a acestuia este mai mare decât aria bazei (oblica este mai mare decât perpendiculara).

Problemele de maxim sunt unele dintre cele mai interesante probleme de matematică. La început se puneau probleme geometrice, și de multe ori soluția intuitivă era cea acceptată. Cu timpul problemele de maxim și minim au devenit probleme de calcul diferențial și integral sau de programare liniară și optimizare, atât de des folosite în economie sau în teoria probabilităților, și în câte alte domenii.

Lăsând la o parte problema de matematică, să revenim la povestea Didonei. Suprafața de pământ obținută de ea a fost suficientă pentru a ridica o cetate, numită Cartagina (Qrt Hdșt – orașul nou, în limbile semitice, Kart-Hadașt, în limba feniciană, sau Carthago, în latină), cetate care ulterior s-a dezvoltat și a cunoscut o istorie furtunoasă.

Una dintre legende spune că Didona s-a jertfit pe un rug de foc pentru a garanta bunăstarea cetății. Altă legendă spune că ea ar fi fost cerută în căsătorie de un vecin bogat, Hiarbas, care ar fi amenințat cu război în cazul unui refuz. Pentru a-și proteja supușii, Dido și-ar fi înălțat singură un rug funerar și s-ar fi sinucis.

Cea mai impresionantă variantă este însă în Eneida lui Vergilius, epeea originii Romei (Publius Vergilius Maro – 70-19 î. Hr.).

După căderea Troiei, Aeneas, fiul Afroditei, rătăcește pe mări, destinul său, hotărât de zei, fiind să pună bazele unui nou regat (fiul său, Ascanius, va întemeia cetatea Alba Longa, iar fiica unui rege al acestei cetăți, preoteasa Rhea Silvia, va da naștere celor doi gemeni Romulus și Remus, Romulus fiind fondatorul Romei). După nenumărate peripeții Aeneas și tovarășii săi ajung pe țărmurile Africii, nu departe de Cartagina, unde frumoasa Didona le-a oferit găzduire. Zeița Junona ar fi vrut să zădărnicească planurile zeiței Venus (Afrodita), și-l trimite pe Cupidon (Eros) să o facă pe Didona să se îndrăgostească de Aeneas. Didona rezistase până atunci numeroaselor cereri în căsătorie, fidelă jurământului făcut. De data aceasta zeița câștigă și ea se îndrăgostește cu patimă de erou și chiar îl face părtaș la conducerea cetății. În epeea lui Vergilius cei doi chiar s-ar fi căsătorit, dar Jupiter (Zeus), l-a trimis pe Mercur (Hermes) care i s-ar fi

arătat eroului și i-ar fi amintit că datoria sa era alta. Aeneas decide să o părăsească pe Didona pe ascuns, convins că aceasta nu i-ar fi redat libertatea de bună voie. Didona a aflat și s-a retras îndurerată în palat. Aeneas a plecat pe mare aruncându-și o ultimă privire spre țărmul unde fusese atât de fericit. Vede pe zidurile orașului un mare foc dar nu știe că acesta era rugul pe care se urcase nefericita regină, după care își împlântase un pumnal în piept.

Una dintre cele mai sfâșietoare povești de dragoste din istoria literaturii a inspirat, după cum spuneam, pictori și compozitori din toate timpurile.

Dar nu numai. Într-unul din satele de pe valea Siretului circulă o legendă care are puncte comune cu povestea noastră: vacile din cireada unui boier erau mânate de obicei spre imașul obștei. O dată, de două ori, până a devenit obicei. Sătenii, nemulțumiți, s-au gândit să-l pedepsească pe boier și i-au omorât un bou. Boierul s-a hotărât să-i sancționeze pe săteni și le-a cerut acestora drept despăgubire pentru animalul pierdut atâta pământ cât se poate cuprinde cu pielea animalului. Țăranii s-au învoit, neștiind ce avea de gând boierul (care sigur cunoștea legenda Cartaginei). Acesta a jupuit pielea animalului, a tăiat-o în fâșii înguste cu care a înconjurat din obștea satului atât cât s-a putut. Se vede că destul de mult!

Revenind, Didona a reușit să determine în plan o curbă închisă, de lungime dată, care delimitează aria maximă, aceasta fiind un cerc. Acest caz este însă departe de a fi simplu.

Tot în antichitate această însușire a cercului a fost studiată de grecul Zenador. Arhimede s-a ocupat și el de această problemă, dar tot ce se poate nu s-a păstrat prea mult din aceste cercetări ale lui. Alte referiri la vechea literatură se mai pot găsi în notele lui W. Schmidt *Privind istoria izoperimetriei în antichitate*.

În momentul descoperirii calculului variațional, savanții de frunte se ocupau deja de problemele particulare ale izoperimetriei și de generalizările analitice ale acestora. Teoria calculului variațional își are originea în rezolvarea problemei brahistocrone (adică a celui mai scurt timp).

Aceasta a fost formulată de Jean Bernoulli în 1696. Soluția acestei probleme a fost publicată independent de cei doi frați Bernoulli, Jacques (1654-1705) și Jean (1667-1748), metodele de obținere a soluției fiind diferite.

Este interesant faptul că s-a iscat o dispută între cei doi, privind prioritatea, dispută care a dat un imbold și un gust neobișnuit inițiatorilor calculului variațional.

Calculul variațional este un capitol al analizei matematice care are ca obiect studiul problemelor de determinare a extremelor unei funcționale.

Printre cei care au generat apariția calculului variațional se numără problema izoperimetrelor și, așa cum am mai amintit, brahistocroniei. Denumirea și fundamentarea calculului variațional i se datorează lui Euler (1744), cele două articole ale lui Jacques Bernoulli, din 1697 și 1701, constituind punctul de plecare al cercetărilor sale, el fiind cele mai vestit fondator a numeroase discipline matematice. În aceste sens amintim culegerea sa de exemple referitoare la calculul variațiilor *Metoda găsirii liniilor curbe care au proprietățile minimului sau maximului sau rezolvarea problemelor izoperimetrice în sensul cel mai larg*. Lagrange (1760) a introdus noțiunea de variație și a dat o metodă de determinare a extremelor unei funcționale.

Calculul variațional are aplicații în mecanica sistemelor, hidrodinamică, teoria elasticității, optică geometrică sau în domeniul vibrațiilor sistemelor mecanice. În acest din urmă caz, cea mai frecventă problemă de vibrații este aceea a determinării frecvențelor naturale ale unui sistem în vibrație. Frecvența cea mai joasă sau frecvența fundamentală este de obicei de cel mai mare interes în practica inginerescă. Metoda energetică a lui Rayleigh combinată cu procedeul Ritz este metoda cea mai obișnuită folosită pentru determinarea frecvențelor naturale. Pe scurt, procedeul constă în a admite o formă de vibrație sau o configurație care este în esență aceea a sistemului atunci când acesta ocupă poziția de deplasare maximă, corespunzând modului fundamental.

Revenind, principalul inconvenient al tuturor acestor studii analitice privind problemele de extremum îl constituie lacunele în problema existenței acestor extremale. Pentru prima oară această problemă a fost pusă de Weierstrass. O nouă demonstrație cu utilizarea șirurilor trigonometrice ne vine de la A. Hurwitz. În asemenea mod problema a fost abordată de G. Cramer, S. Lhuillier și, în special, de atotcuprinzătorul Steiner, dintre primele demonstrații ale acestuia din urmă folosindu-se și astăzi *metoda*

patrulaterului. A doua metodă, *metoda simetrizării*, ne va fi utilă în tratarea problemelor extremale din cuprinsul aceste cărți.

Steiner a publicat aceste metode în trei articole destul de ample reproduse în volumul doi al operelor sale complete. După părerea lui Weierstrass, articolele indicate fac parte din lucrările cele mai importante ale acestui fecund geometru. Primul articol, este denumit *Simplă demonstrație a teoremei izoperimetrice fundamentale*, el fiind scris în anul 1836. Celelalte două *Despre maxime și minime pentru figuri pe o suprafață, pe o sferă și în spațiu, în general* au fost prezentate de Steiner Academiei din Paris în anul 1841. *Metoda patrulaterului* a fost conținută în primul dintre aceste articole, cu același titlu, sub denumirea *Prima metodă de demonstrare*.

În genul celor scrise de Steiner a fost scrisă și cartea lui R. Sturm *Maximum și minimum* (R. Sturm, Maxima und Minima, Leipzig und Berlin, 1910). Completarea demonstrațiilor lui Steiner s-a făcut în repetate rânduri. În special, F. Edler, absolut elementar, cu ajutorul simetrizării, a demonstrat proprietatea extremală a poligoanelor regulate (1882).

C. Caratheodory și E. Study au completat demonstrația lui Steiner cu două realizări diferite *Două demonstrații a faptului că cercul are cea mai mare suprafață dintre toate figurile care au același perimetru*. C. Caratheodory, aplicând curbei închise metoda *patrulaterului*, a arătat că în cazul unei treceri la limită corespunzătoare acest proces ne conduce la un cerc. Demonstrația lui E. Study corespunde în linii mari cu cea a lui C. Caratheodory, numai că în locul teoremei de existență a lui Weierstrass utilizează un oarecare proces asemănător. Metoda lui Study a fost extinsă de Schwartz în domeniul geometrie sferice.

Weierstrass, în cursurile sale, a demonstrat proprietățile extremale ale poligoanelor regulate cu ajutorul unui proces analitic elegant.

Într-o ediție italiană, a lui F. Enriques, a *Enciclopediei de matematică elementară*, apare însemnarea lui O. Chizini *Privind teoria elementară a izoperimetriei și notița lui F. Enriques Maximum și minimum în analiza contemporană*.